جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن المجموعة $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ تشكل حقلاً بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10.

(2) إن الحلقة $R = Z \oplus Z$ هي منطقة تكاملية، لأن الحلقة Z منطقة تكاملية.

(3) إذا كانت $A = 6Z$, $B = 2Z$ مثاليتين في Z، فإن $A.B = A \cap B$.

(4) إذا كانت $A = 6Z$, $B = 4Z$ مثاليتين في Z، فإن $A : B = 2Z$

(5) إن $Z_{12} = 4Z_{12} \oplus 9Z_{12}$.

(6) إن عدد عناصر حلقة الخارج $Z_{12}/6Z_{12}$ يساوي عنصرين فقط .

(7) إن العنصر $(3 , 0)$ جامد وليس قاسم للصفر في الحلقة $Z_2 \oplus Z_6$.

(8) إن المثالية $< 7 >$ أعظمية في الحلقة Z_{12} .

(9) إذا كانت $R = Z_{30}$ فإن $J(R) = <2> \cap <3> = <6>$ (أساس جاكبسون).

(10) إن $(Z_{15} , + , \cdot)$ هي حلقة موضعية .

(11) مميز الحلقة $Z_4 \oplus 4Z$ يساوي العدد 4 .

(12) المثالية الصفرية أولية في أي حلقة.

(13) إن حلقة الأعداد العادية $(Q , + , \cdot)$ ساحة مثاليات رئيسية.

(14) إن الحدودية $f(x) = x^2 + 1$ هي حدودية أولية فوق Z_5 .

السؤال الثاني (42 درجة): **علل صحة ما يلي:** لتكن R حلقة.

(1) إذا كان $0 \neq a \in R$ عنصراً جامداً فإن a ليس عديم القوة .

(2) كل مثالية في R نواة لتشاكل حلقي غامر .

(3) إن كل عنصر من الحلقة R وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في R .

(4) كل مثالية يسارية عديمة A في الحلقة R تكون محتواة في أساس جاكبسون $J(R)$.

(5) إذا كانت A, B مثاليتين يساريتين في الحلقة R وكانت A صغيرة في R فإن $A \cap B$ صغيرة في R.

(6) إذا كان x عنصراً من الحلقة R عديم القوة فإن $x \in rad\ R$ (rad R الأساس الأولي للحلقة R).

السؤال الثالث (16 درجة):

عرف الحلقة الاقليدية . ثم أثبت أن أي حلقة اقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية

2015 – 6 – 17

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2014 - 2015
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثالثة رياضيات

المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100 درجة
الاسم:

السؤال الأول (42 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن الحلقة $R = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ بالنسبة للجمع والضرب بالمقاس 10 ليست واحدية.

(2) إن الحلقة $(Z_{119}, +, \cdot)$ هي حقل.

(3) إن عدد مثاليات حلقة الأعداد الحقيقية $(R, +, \cdot)$ غير منته.

(4) إذا كانت $A = 6Z$ ، $B = 4Z$ ، فإن $A.B = A \cap B$.

(5) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في الحلقة Z_{57} .

(6) إن عدد عناصر حلقة الخارج $3Z/_{15Z}$ يساوي 3 عناصر.

(7) إن العنصر $(3, 1)$ جامد وقاسم للصفر في الحلقة $Z_3 \oplus Z_6$.

(8) إن المثالية $< 4 >$ أعظمية في الحلقة Z_{24} .

(9) إن المثالية $< 4 >$ أولية في الحلقة Z_8 .

(10) إن $(Z_6, +, \cdot)$ هي حلقة موضعية.

(11) مميز الحلقة $(5Z, +, \cdot)$ يساوي العدد الأولي 5.

(12) حلقة الخارج $Z/_{3Z}$ هي حلقة مثاليات رئيسية.

(13) إن الحدودية $x^2 + 3x + 2 \in Z_6[x]$ تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في Z_6 .

(14) حلقة كثيرات الحدود على أي حقل هي حلقة اقليدية.

السؤال الثاني (32 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت A, B مثاليتين في الحلقة R ، تحققان $A \cap B = 0$ ، فإنه أياً كان $a \in A$, $b \in B$ فإن $a . b = 0$.

(2) إن كل عنصر من الحلقة R وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في R .

(3) إن أي مثالية يسارية عديمة القوى في الحلقة R تكون عديمة.

(4) كل مثالية يسارية عديمة A تكون محتواة في أساس جاكبسون $J(R)$.

(5) إن أساس جاكبسون $J(R)$ موجود في الحلقة R ولا يساوي الحلقة R وهو أكبر مثالية يسارية صغيرة في R.

السؤال الثالث (26 درجة): لتكن R حلقة تبديلية و A مثالية في R .

عرف جذر (أساس) المثالية A $(\text{rad } A)$، ثم أثبت ما يلي:

(1) $\text{rad } A$ مثالية في R.

(2) إذا كانت A مثالية أولية في R، فإن $\text{rad } A = A$.

(3) من أجل أي حلقة واحدية R يكون $\text{rad } R \subseteq J(R)$ حيث $J(R)$ هو أساس جاكبسون في R.

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

2015 / 2 / 17

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة التكميلية للعام الدراسي 2013 - 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان [illegible]
العلامة: 100 درجة
الاسم:

السؤال الأول (42 درجة):
أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن حلقة الأعداد العادية $(Q,+,\cdot)$ هي منطقة تكاملية.
(2) إن الحلقة $(Z_{119},+,\cdot)$ هي حقل.
(3) قانون الاختصار محقق بأي حلقة ايزومورفية مع (تماثل) منطقة تكاملية.
(4) إن الحلقة $(nZ,+,\cdot)$ حيث $n\in Z$ هي منطقة تكاملية جزئية من $(Z,+,\cdot)$.
(5) إن عدد عناصر حلقة الخارج $3Z/_{15Z}$ يساوي 3 عناصر .
(6) إن حلقة الخارج $Z/_{6Z}$ هي حقل.
(7) إن حلقة الأعداد الحقيقية $(R,+,\cdot)$ ساحة مثاليات رئيسية.
(8) إن المثالية $<$[illegible]$>$ أعظمية في الحلقة Z_{12}.
(9) إن $(Z_6,+,\cdot)$ هي حلقة موضعية .
(10) إن 3 عنصر ليس عديم القوى في Z_{27} .
(11) مميز الحلقة $(nZ,+,\cdot)$ حيث $n\in Z^+$ يساوي العدد n .
(12) إن المثالية $2Z\cap 5Z$ هي مثالية أولية في الحلقة Z.
(13) إن العنصر 4 جامد في الحلقة $(Z_{11},+,\cdot)$.
(14) إن الحدودية $x^2+3\in Z_7[x]$ تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في Z_7 .

السؤال الثاني (22درجة): لتكن R , S حلقتين واحديتين، وليكن $f: R\to S$ هومومورفيزما حلقيا.
أثبت ما يلي:
(1) إذا كانت A مثالية يسارية في R ، وكان f غامرا فإن $f(A)$ مثالية يسارية في S.
(2) إذا كان f غامرا فإن $f(1_R)=(1_S)$.
(3) إذا كانت A , B مثاليتين في R بحيث إن $B\subseteq A$ ، فإن $\dfrac{R/_B}{A/_B}\cong R/_A$.

السؤال الثالث (36 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت N , M مثاليتين في الحلقة R (التبديلية والواحدية)، تحققان $M+N=R$، فإن $M.N=M\cap N$.
(2) إن كل عنصر من الحلقة R وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في R .
(3) إذا كانت A مثالية يمينية أصغرية في الحلقة الواحدية R ، فإن $A=aR$ حيث $0\neq a\in A$.
(4) إن أي مثالية يسارية عديمة القوى في الحلقة R لاتحوي عناصر جامدة مغايرة للصفر.
(5) إذا كانت A مثالية يسارية صغيرة في الحلقة R، فإن $A\subseteq J(R)$ ، حيث $J(R)$ هو أساس جاكبسون في R.

2014 - 8 - 18

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الكوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثانية للعام الدراسي 2013 - 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 100 درجة
الاسم:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) كل عنصر مغاير للصفر في الحلقة Z_{10} يكون قابلا للقلب أو قاسما للصفر .

(2) إن الحلقة $(Z_{57}, +, \cdot)$ هي منطقة تكاملية.

(3) إذا كانت $A = 6Z\ ,\ B = 8Z$ ، فإن $A.B = A \cap B$.

(4) إن عدد عناصر حلقة الخارج $3Z/_{12Z}$ يساوي 3 عناصر .

(5) إن حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ ليست حقلاً لأن 2Z ليست واحدية.

(6) $Z \cong nZ\ ;\ \forall\ n > 1$.

(7) إن المثالية $< 3 >$ أعظمية في الحلقة Z_{36} .

(8) كل حلقة اقليدية هي حلقة مثاليات رئيسية .

(9) مميز الحلقة $(5Z, +, \cdot)$ يساوي العدد الأولي 5 .

(10) إن المثالية 12Z أولية في Z.

(11) إن العنصر 4 جامد في الحلقة $(Z_{10}, +, \cdot)$.

(12) إن الحدودية $x^2 + 3x + 2 \in Z_6\,[x]$ تملك صفرين (جذرين) على الأكثر في Z_6 .

السؤال الثاني (30 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) كل حقل F هو منطقة تكاملية .

(2) ~~إذا كانت R منطقة تكاملية فإن العناصر الجامدة في R هي فقط 0 و 1~~

(3) إن كل عنصر من الحلقة R وغير قابل للقلب من اليسار ينتمي إلى أحد المثاليات اليسارية الأعظمية في R .

(4) إذا كانت A مثالية يسارية أصغرية في الحلقة R ، فإن $A = R\,a$ حيث $0 \neq a \in A$.

(5) إن أساس جاكبسون $J(R)$ في الحلقة R هو مثالية يسارية صغيرة في الحلقة R .

السؤال الثالث (24 درجة): أثبت ما يلي:

(1) إذا كان العنصر $x \in R$ عديم القوى في الحلقة R ، فإن $x \in rad\ R$ حيث $rad\ R$ هو الأساس الأولي للحلقة R .

(2) إذا كانت A مثالية في R فإن $rad\,(rad\ A) = rad\ A$ ، حيث $rad\ A$ هو جذر (أساس) A.

(3) من أجل أي حلقة واحدية R يكون $rad\ R \subseteq J(R)$ حيث $J(R)$ هو أساس جاكبسون في R.

السؤال الرابع (10 درجات): أثبت أن:

حلقة الحدوديات $F[x]$ فوق أي حقل F هي حلقة مثاليات رئيسية.

2014 - 6 - 2

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2013 - 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 100 درجة
الاسم: اسـ الهـا ـشـ ـيـر

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة): أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن إن $17Z \cup 51Z$ مثالية في الحلقة Z وتساوي Z.
(2) إن حلقة الخارج $2Z/6Z$ هي حقل.
(3) إن $(Z_{20}, +, \cdot)$ هي حلقة تامة.
(4) إن حلقة الخارج $3Z/12Z$ حلقة ليست واحدية لأن 3Z حلقة ليست واحدية .
(5) إن عدد عناصر حلقة الخارج $2Z/8Z$ يساوي 8 عناصر .
(6) كل حلقة تبديلية وواحدية تحقق خاصية الاختصار.
(7) كل عنصر مغاير للصفر في حلقة تبديلية وواحدية يكون إما قاسم للصفر أو قابل للقلب .
(8) إن المثالية الصفرية في حلقة الأعداد العادية Q أولية .
(9) مميز الحلقة $(5Z, +, \cdot)$ يساوي 5 .
(10) إن $2Z \cap 5Z$ مثالية أعظمية في Z.
(11) إن العنصر 4 جامد في الحلقة $(Z_{10}, +, \cdot)$.
(12) إن حلقة الأعداد الصحيحة $(Z, +, \cdot)$ حلقة أرتينية ونيوثرية بآن واحد.

السؤال الثاني (40 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) إذا انتمى عنصر قابل للقلب من اليسار لمثالية يسارية A من حلقة واحدية R، فإن $R = A$.
(2) إذا كانت N , M مثاليتين في الحلقة R (التبديلية والواحدية)، تحققان $M + N = R$، فإن $M.N = M \cap N$.
(3) إذا كان Z_n $(n>1)$ حقلاً، فإن n يكون أولياً .
(4) كل مثالية عديمة القوى في حلقة R ، تكون عديمة .
(5) إذا كانت الحلقة R واحدية وتبديلية، و A مثالية أولية في R ، فإن $rad\, A = A$.
(6) حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة اقليدية.

السؤال الثالث (24درجة): لتكن R, S حلقتين واحديتين، وليكن $f: R \to S$ هومومورفيزما حلقياً. أثبت ما يلي:

(1) $\ker f$ (نواة f) مثالية في R.
(2) إذا كان f غامراً فإن $f(1_R)=(1_S)$.
(3) $R/_{\ker f} \cong \operatorname{Im} f$.

2013 - 1 - 15

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

سلم تصحيح

أجوبة مقرر الجبر 2/

سنة ثانية رياضيات

امتحان الفصل الأول للعام الدراسي 2013 - 2014

الجواب الأول 60 درجة لكل طلب 5 درجات.

1) خطأ لأن اجتماعهم يساوي $17Z$.

2) صح.

3) خطأ لأن يوجد قواسم للصفر $2, 5 \neq 0$ ولكن $2\times5=0$.

4) خطأ، حلقة واحدية والحيادي فيها $9+12Z$.

5) خطأ، يساوي 4 عناصر.

6) خطأ يجب أن تكون تامة.

7) خطأ، يجب أن تكون منتهية.

8) صح

9) خطأ، يساوي صفر لأنها غير منتهية.

10) خطأ، لأن $2Z \cap 5Z$ محتواة في $2Z$ وفي $5Z$.

11) خطأ، لأن $4^2 = 6 \neq 4$

12) خطأ، Z حلقة نيوثرية وليست آرتينية.

الجواب الثاني 40 درجة (لكل من 1 و 3 (6) درجات ولكل من 2 و 4 و 5 و 6 (7) درجات)

1) ليكن $a \in A$ حيث a عنصر قابل للقلب من اليسار عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $ba = 1$ ومنه $1 = ba \in A$ وهذا يؤدي إلى أن $R = A$ (6)

(2)

2) أن $MN \subseteq M\cap N$ وذلك لأنه إذا كان

(7) $x\in MN$ عندئذ $x=\sum a_i b_i$ حيث $a_i\in M, b_i\in N$

وهذا المجموع منه. ومنه $x\in M$ و $x\in N$ وبالتالي $x\in M\cap N$

الاحتواء المعاكس. $1\in R$ و $R=M+N$ ومنه يوجد $a\in M$ و $b\in N$

حيث $1=a+b$. ليكن $x\in M\cap N$ عندئذ $x=x(a+b)=xa+xb$
$=xa+bx\in MN$

ومنه $M\cap N\subseteq MN$ ... ومن ثم فإن $M\cap N=MN$

3) أن Z_n ايزومورفيزم $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ وبالتالي $n\mathbb{Z}$ مثالية أعظمية

(6) في $\mathbb{Z}$ ومنه هي أولية في $\mathbb{Z}$ وهذا يقتضي أن n أولي.

4) B عديم القوى في R عندئذ يوجد $n\in N^*$ بحيث $B^n=0$

(7) من جهة أخرى، ليكن $b\in B$ عندئذ $b^n=bb\ldots b\in B^n=0$

وهذا يبين أن كل عنصر من B هو عديم القوى ومن ثم فإن B مثالية عديمة

5) أن $\text{Rad}\,A\supseteq A$. ليكن $x\in \text{rad}\,A$ عندئذ يوجد $n\in N^*$

(7) بحيث $x^n\in A$ وبما أن A مثالية أولية في R فإن $x\in A$ ومنه

$\text{Rad}\,A\subseteq A$ ومن ثم فإن $\text{Rad}\,A=A$

6) $\mathbb{Z}$ هي منطقة تكاملية. نعرف $\varphi: \mathbb{Z}^*\to N$ من الشكل $\varphi(m)=|m|$, $m\in \mathbb{Z}^*$

(7) نجد φ تطبيق ويحقق $\varphi(ab)=|ab|=|a||b|\geq|a|=\varphi(a)$, $a,b\in \mathbb{Z}^*$ ليكن $a,b\in \mathbb{Z}$ حيث $b\neq 0$

وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q,r\in \mathbb{Z}$ حيث $a=bq+r$ حيث $0\leq|r|<|b|$

(3)

ومنه إما $r=0$ أو $0<r<|b|$ ومنه $|r|<|b|$ أي $r=|r|<|b|$ أي

إما $r=0$ أو $\varphi(r)<\varphi(b)$.

الجواب الثالث [24] درجة لكل من 1 و 2 7 درجات والثالث عشرة درجة

1) بما أن $f(0)=0$ فإن $0\in \ker f$ ومنه $R\supseteq \ker f\neq\phi$

(7) ليكن $x,y\in \ker f$ عندئذ $f(x)=f(y)=0$ ومنه $f(x-y)=f(x)-f(y)=0$

أي أن $x-y\in \ker f$. من جهة أخرى إذا كان $r_1, r_2\in R$ فإن

$f(r_1\times r_2)=f(r_1)f(r_2)=0$ ومنه $r_1\times r_2\in \ker f$. إذاً $\ker f$ مثالي في R .

2) البرهان: بما أن f غامر و $1_S\in S$ فإنه يوجد $x\in R$ بحيث $f(x)=1_S$

(7) وبما أن $1_R\in R$ ، لنفرض أن $f(1)=y$ عندئذ:

$1_S=f(x)=f(1x)=f(1)f(x)=y1=y$ ومنه $f(1_R)=1_S$

3) لنعرف العلاقة $\varphi: R/\ker f\to \mathrm{Im} f$ على النحو الآتي: إذا كان $x+\ker f\in R/\ker f$:

(10)

فإن $\varphi(x+\ker f)=f(x)$ نجد أن φ تطبيق ومتباين (وهو غامر) لأنه إذا كان

$x+\ker f, y+\ker f\in R/\ker f$ بحيث

$$x+\ker f=y+\ker f \Leftrightarrow (x-y)+\ker f=\ker f \Leftrightarrow$$

$$x-y\in \ker f \Leftrightarrow f(x-y)=0 \Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow$$

$$\varphi(x+\ker f)=\varphi(y+\ker f)$$

كما أن φ هومومورفيزم لأن:

$$\varphi[(x+\ker f)+(y+\ker f)]=\varphi((x+y)+\ker f)$$

$$=f(x+y)=f(x)+f(y)=\varphi(x+\ker f)+\varphi(y+\ker f)$$

و

$$\varphi[(x+\ker f)(y+\ker f)]=\varphi[(xy+\ker f)]=f(xy)=f(x)f(y)=$$

$$\varphi(x+\ker f)\,\varphi(y+\ker f)$$

الباقي في الخلف

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012 - 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $2Z \cup 8Z$ مثالية في الحلقة Z وتساوي $8Z$.

(2) إن جميع عناصر الحلقة Z_4 المغايرة للصفر عناصر قابلة للقلب فيها.

(3) إن حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ هي ليست ساحة صحيحة (منطقة تكاملية).

(4) إن $(Z_8 , + , \cdot)$ حلقة موضعية وليست حقلا .

(5) إن عدد عناصر حلقة الخارج $7Z/_{21Z}$ يساوي 7 عناصر.

(6) إن مميز الحلقة $(5Z , + , \cdot)$ يساوي العدد الأولي 5 .

(7) إن العنصر 2 في الحلقة $(Z_8 , + , \cdot)$ جامد وليس عديم القوى.

(8) إن الحلقة Z_5 إيزومورفية مع حلقة الخارج $Z/_{5Z}$.

(9) المثالية الصفرية أولية في الحلقة $(Z_{12} , + , \cdot)$.

(10) إن $2Z \cap 3Z$ مثالية أعظمية في Z.

(11) إن حلقة الأعداد العادية Q هي ساحة مثاليات رئيسية .

(12) إن حلقة الأعداد الحقيقية R هي حلقة نيوثرية وليست أرتينية.

السؤال الثاني (32 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلا .

(2) إذا كانت الحلقة R تحقق خاصية الاختصار، فإن R حلقة تامة.

(3) إذا كانت الحلقة R واحدية وتبديلية، و A مثالية أولية في R ، فإن $\operatorname{rad} A = A$.

(4) حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة إقليدية.

السؤال الثالث (32 درجة):

أثبت ما يلي:

(1) لتكن R حلقة واحدية، عندئذ إذا كانت $A \neq R$ مثالية يسارية من R، فإنه توجد في R مثالية يسارية أعظمية تحوي A .

(2) إذا كانت A , B مثاليتين يساريتين في الحلقة R بحيث إن $A \subseteq B$ وإذا كانت B صغيرة في R فإن المثالية A تكون صغيرة في R .

(3) لتكن المثالية اليسارية A من الحلقة R عديمة القوى في R، عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = 0$.

مع أطيب التمنيات بالنجاح

2013 - 7 - 1

د. إيمان الخوجة.

سلم تصحيح مقرر البنى الجبرية /2/
سنة ثانية رياضيات
1 / 7 / 2013

الجواب الأول 36 درجة لكل [illegible] درجات

1) $2Z \cup 8Z$ مثالية من Z تكافئ تساوي $12Z$.

2) خطأ، 2 قاسم الصفر وليس قابل القلب.

3) خطأ، [illegible] مثالية ([illegible] واحدية Z_6 [illegible] [illegible])

4) صح.

5) خطأ، يساوي 3 عناصر وهي $\{21Z, 7+21Z, 14+21Z\}$.

6) خطأ، مميز الحلقة $5Z$ يساوي الصفر لأنها غير منتهية

7) خطأ، 2 ليس جامد لأن $2^2 = 4 \neq 0$ وهو عديم القوى لأنه يوجد $3 \in Z^+$ يحقق $2^3 = 0$

8) صح.

9) خطأ، لأن Z_8 ليست منطقة تكاملية.

10) خطأ، لأن $2Z \cap 3Z$ محتواة في $2Z$ ومحتواة في $3Z$.

11) صح لشرط حقل.

12) خطأ، R حقل فهو حلقة نيوترية وارتينية بآن واحد.

الجواب الثاني 32 درجة لكل بند 8 درجات

~~1- لتكن R منطقة تكاملية منتهية غير تبديلية واحدية ولنبين أن كل عنصر غير الصفر فيها قابل~~

لتكن $0 \neq a \in R$. إذا كان $a = 1$ فإنه قابل للقلب. لنفرض $a \neq 1$ عندئذ $a, a^2, a^3, \ldots \in R$ وكون R منتهية فإنه توجد أعداد صحيحة موجبة $i, j \in Z$ بحيث $i \neq j$ و $a^i = a^j$. وطالما كان $i \neq j$

2/6

(2) تصحيح

R تحقق خاصية الاختصار، ولتكن $a, b \in R$ تحقق $ab = a$ [12]

ولنفرض أن $a \neq 0$ عندئذ $ab = 0 = a0$ ومنه وحسب الفرض بالاختصار نجد

$b = 0$ أي R لا تحوي قواسم الصفر.

3- A مثالية أولية في R عندئذ، من جهة أولى $A \subseteq rad A$.

ومن جهة ثانية، لتكن $x \in rad A$، عندئذ يوجد $n \in N^*$ يحقق $x^n \in A$ وبما أن

A مثالية أولية في R ينتج أن $x \in A$ ومنه $rad A \subseteq A$. إذن $rad A = A$.

4- إن Z منطقة تكاملية، لنعرف العلاقة $\varphi : Z^* \to N$ على النحو التالي $\varphi(m) = |m|$ لكل $m \in Z^*$

نجد أن φ تطبيق ويحقق أيضاً أن $a, b \in Z^*$ فإن $\varphi(ab) = |ab| = |a||b| \geq |a| = \varphi(a)$

لتكن $a, b \in Z$ بحيث $b \neq 0$. وحسب خوارزمية القسمة يوجد $q, r \in Z$ بحيث

$a = bq + r$ حيث $0 \leq r < |b|$ وهذا يبين إما $r = 0$ أو $0 < r < |b|$ ومنه

$r = |r| < |b|$ أي إما $r = 0$ أو $\varphi(r) < \varphi(b)$ ومنه Z حلقة إقليدية.

الجواب الثالث 22 درجة

1- $A \neq R$ مثالية سارية في R ولتكن $T = \{B : B \text{ مثالية سارية في } R, A \subseteq B \neq R\}$ نجد أن $T \neq \phi$

[12] إذن $A \in T$ و T مرتبة جزئياً وفق الاحتواء. لتكن T_0 مجموعة جزئية من T غير خالية

ومرتبة كلياً عندئذ $K = \bigcup_{B \in T_0} B$ مثالية سارية في R تحوي A ولتساوي R إذن

إذا كان $K = R$ فإن $1 \in \bigcup_{B \in T_0} B = K$ ومنه يوجد $D \in T_0$ بحيث أن $1 \in D$ وهذا

~~يؤدي إلى أن $D = R$~~ مما يناقض كون $D \in T_0 \subseteq T$. إذاً $K \neq R$. إذاً $K \in T$.

إن K حد أعلى للمجموعة T_0 في T. لتكن $N \in T_0$ عندئذ $N \subseteq \bigcup_{B \in T} B = K$ عند

4E

(3)

تابع الجواب الثالث

2- A, B مثاليين يساريين في R بحيث إن $A \subseteq B$ [ولنفرض] أن B مثالية يسارية صغيرة في R. ولتكن K مثالية يسارية في R تحقق $A + K = R$ عندئذ $R = A + K \subseteq B + K \subseteq R$ ومنه يكون $B + K = R$ وحسب الفرض ينتج أن $K = R$. إذاً A صغيرة في R.

3- لنفرض أن المثالية اليسارية A عديمة القوى عندئذ توجد $n \in N^*$ بحيث $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ وذلك أياً كان $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$. ليكن $x \in A^n$ عندئذ $x = \sum b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_n} = 0$ حيث $b_{ij} \in A$ لكل $1 \leq j \leq n$ ومنه $A^n = 0$.

د. إيمان الخوجة

تاريخ الامتحان

2013 / 7 / 1

جامعة البعث امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2011 - 2012 المدة: ساعتان
كلية العلوم أسئلة مقرر البنى الجبرية (2) العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات سنة ثانية رياضيات الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):
أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:
(1) إن عدد مثاليات الحلقة $(Z_7 , + , \cdot)$ سبع مثاليات .
(2) إن حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ حلقة ليست واحدية .
(3) إن $2Z + 5Z = 7Z$ في الحلقة Z .
(4) إن عدد عناصر حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ يساوي 6 عناصر .
(5) المثالية $A = \{0 , 4\}$ أولية في الحلقة $(Z_8 , + , \cdot)$.
(6) إن المثالية $4Z$ أعظمية في الحلقة $2Z$.
(8) إن أي عنصر مغاير للصفر في الحلقة المنتهية يكون عكوساً أو قاسماً للصفر.
(9) مميز الحلقة $(11Z , + , \cdot)$ يساوي 11 .
(10) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة .
(11) كثيرة الحدود $x^4 + 3x^2 + 3 \in Z[x]$ أولية (غير قابلة للتحليل) في الحلقة $Z[x]$.
(12) إن حلقة الأعداد العادية $(Q , + , \cdot)$ حلقة أرتينية ونيوثرية بآن واحد.

السؤال الثاني (40 درجة): علل صحة ما يلي:
(1) لتكن R حلقة تبديلية و واحدية، ولتكن A , B مثاليتين في الحلقة R تحققان $A + B = R$، عندئذٍ $A . B = A \cap B$.
(2) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً .
(3) إذا كان F حقلاً فإن F يحوي مثاليتين فقط هما $\{0\}$ و F.
(4) إذا وجد في المثالية A من الحلقة R عنصر قابل للقلب من اليسار، فإن $R = A$.
(5) إذا كانت الحلقة R تبديلية وواحدية فإن كل مثالية أعظمية في الحلقة R ، هي مثالية أولية.

السؤال الثالث (24 درجة): أثبت ما يلي:
(1) لتكن R حلقة تبديلية و واحدية ، ولتكن $A \neq R$ مثالية في R ، عندئذ يوجد في R مثالية أعظمية تحوي A .
(2) أثبت أن كل حلقة اقليدية R هي حلقة مثاليات رئيسية .

2012 – 6 – 25

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

(9)

مسلم تصحيح مقرر الجبر الجبرية /2/

سنة ثانية رياضيات / تاريخ الامتحان 25/6/2012

الجواب الأول: لكل بند ثلاث درجات (36) درجة

(1) خطأ، مناليس لأن Z_2 حقل.

(2) خطأ، $\frac{2Z}{6Z}$ واحدية فقط $4+6Z$ هو العنصر الحيادي.

(3) خطأ، $Z = 2Z+5Z$ لأن 2، 3 أوليان فيما بينهما.

(4) خطأ، [illegible] حلقة الخارج $\frac{2Z}{6Z}$ يساوي 3.

(5) خطأ، إن A ليست أولية لأن $2.2=4$ و $2 \notin A$.

(6) صح. (7) غير موجود و تعطى علامته لصالح الطالب.

(8) صح.

(9) خطأ، مميز الحلقة Z_{11} يساوي الصفر لأنها غير منتهية.

(10) خطأ، قانون الاختصار يتحقق في الحلقات التامة. (المناطق التكاملية).

(11) صح.

(12) صح.

الجواب الثاني: (40 درجة) 8 درجات لكل بند

(1) $A \cdot B = \{\sum x_i y_i : x_i \in A, y_i \in B\}$ وبما أن A, B مثاليه فإن $AB \subseteq A, B$

ومنه $AB \subseteq A \cap B$، الاحتواء المعاكس. بما أن $R = A+B$ وأن $1 \in R$ عندئذ يوجد

$a \in A$ و $b \in B$ بحيث $1 = a+b$. ليكن $x \in A \cap B$ عندئذ $x = ax+bx = ax+xb$

لأن R تبديلية. بما أن $a \in A, x \in B$ عندئذ $ax \in AB$ كذلك $xb \in AB \Leftarrow x \in AB$ أي أن

$A \cap B \subseteq AB$.

(2) لنفرض أن R منطقة تكاملية منتهية. كي نجد عناصر R قابلة للقلب، ليكن $a \in R$، $a \neq 0$. إذا كانت a [illegible] فإن [illegible]

ومن ثم فإن $a^{n}=0$ عندئذ $a^{n-1}\neq 0$ وبالتالي $a \in R$ ، من جهة أخرى ، بما أن $a\neq 0$ فإن $1 \neq a^{n-1}$ وهذا يبين لنا أن $1 = a^{n-1}$ ، وبما أن ... وتكون R منطقة تكاملية فإنه حسب خاصية الاختصار نجد أن $1 = \frac{a^{n}}{a^{n-1}}$ وبما أن $n-1>0$ فإن $1 = a a^{n-2}$ أي a قابل للقلب ومعكوسه a^{n-2} إذاً R حقل.

(3) . إذا كانت A مثالية فعلية في الحقل F عندئذ يوجد $0 \neq x \in A$ ومنه $x^{-1} \in F$ وبما أن F حقل فإن a قابل للقلب ومنه $A = F$.

(4) لنفرض أن A تحوي عنصر قابل للقلب وليكن a ، عندئذ يوجد $b \in R$ بحيث $ba=1$ ومنه $1 = ba \in A$ وبما أن عنصر الوحدة ينتمي لـ A فإن $R = A$.

(5) بما أن R حلقة إبدالية بمحايد فإنه يكون لدينا A أولية في R إذا كانت $\frac{R}{A}$ منطقة تكاملية وهذا يؤدي إلى أن A أولية.

الجواب الثالث : 24 درجة

(1) . لتكن A مثالية في R ولنأخذ المجموعة $T = \{B : R$ مثالية في B ، $A \subseteq B\}$ عندئذ $T \neq \phi$ لأن $A \in T$ ، كما أن T مرتبة جزئياً وفق علاقة الاحتواء . ولتكن T_0 مجموعة جزئية من T غير خالية ومرتبة كلياً وحسب مبرهنة معروفة تكون $K = \bigcup_{B \in T_0} B$ مثالية في R وأن $A \subseteq K$ بالإضافة لذلك فإن $K \neq R$ لأنه لو كان $K = R$ فإن $1 \in K = \bigcup_{B \in T_0} B$ ومنه يوجد $D \in T_0$ بحيث $1 \in D \Leftarrow D = R$ وهذا يناقض كون $D \in T_0 \subseteq T$. إذاً $K \neq R$ وهذا يبين لنا أن $K \in T$ ، أي أن K هو الحد الأعلى للمجموعة T_0 في T . ولتكن $N \in T_0$ فإن $N \subseteq \bigcup_{B \in T_0} B = K$ ومنه حسب توطئة زورن الحد الأعلى للمجموعة T_0 في T وحسب توطئة زورن يوجد في T عنصر أعظمي وليكن M ، إذاً M مثالية أعظمية في R وأن $A \subseteq M$.

12

(2) لتكن R حلقة ... عندئذ حسب الشرط فإن R ... ولتكن A ...

WF

٢٩

ب) لنفرض ان $A \neq \{0\}$ عندئذ يوجد $a \in A$ بحيث $a \neq 0$ ، بما ان الحلقة R اقليدية فانه يوجد تطبيق $\varphi : R^{*} \longrightarrow N$ يحقق الشروط الواردة في تعريف الحلقة الاقليدية.

لنأخذ المجموعة $T = \{\varphi(c) : c \in A , c \neq 0\}$ فنجد ان T مجموعة جزئية من N وغير خالية، لان $\varphi(a) \in T$ وبما ان اي مجموعة جزئية وغير خالية من N تحوي عنصرا اصغر فانه يوجد في T عنصر اصغر وليكن $\varphi(b)$ حيث $b \in A$ وان $b \neq 0$. ومنه بما ان Rb مثالية في R وان $Rb \subseteq A$. ليكن $x \in A$ عندئذ للعنصرين x , b يوجد $q , r \in R$ بحيث $x = bq + r$ وان $r = 0$ او $\varphi(r) < \varphi(b)$. لنفرض ان $r \neq 0$ عندئذ فان $r = x - bq \in A$ وان $\varphi(r) < \varphi(b)$ وهذا يناقض كون $\varphi(b)$ عنصرا اصغر في T.

ومنه نجد ان $r = 0$ وبالتالي $x = bq \in Rb$ وهذا يبين لنا ان $A \subseteq Rb$ ومنه $A = Rb$ ، اذا R حلقة مثاليات رئيسية.

د. إيمان الخوجة

2012/6/25

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2012 - 2013
أسئلة مقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

المدة: ساعتان
العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

اجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $8Z \cup 2Z$ مثالية في الحلقة Z وتساوي $8Z$.

(2) إن جميع عناصر الحلقة Z_4 المغايرة للصفر عناصر قابلة للتلب فيها.

(3) إن حلقة الخارج $2Z/6Z$ هي ليست ساحة صحيحة (منطقة تكاملية).

(4) إن $(Z_8 , + , \cdot)$ حلقة موضعية وليست حقلاً.

(5) إن عدد عناصر حلقة الخارج $7Z/21Z$ يساوي 7 عناصر.

(6) إن مميز الحلقة $(5Z , + , \cdot)$ يساوي العدد الأولي 5.

(7) إن العنصر 2 في الحلقة $(Z_8 , + , \cdot)$ جامد وليس عديم القوى.

(8) إن الحلقة Z_5 إيزومورفية مع حلقة الخارج $Z/5Z$

(9) المثالية الصفرية أولية في الحلقة $(Z_{12} , + , \cdot)$.

(10) إن $2Z \cap 3Z$ مثالية أعظمية في Z.

(11) إن حلقة الأعداد العادية Q هي ساحة مثاليات رئيسية.

(12) إن حلقة الأعداد الحقيقية R هي حلقة نيوترية وليست أرتينية.

السؤال الثاني (32 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) كل منطقة تكاملية منتهية تشكل حقلاً.

(2) إذا كانت الحلقة R تحقق خاصية الاختصار، فإن R حلقة تامة.

(3) إذا كانت الحلقة R واحدية وتبديلية، و A مثالية أولية في R، فإن $rad\, A = A$.

(4) حلقة الأعداد الصحيحة Z هي حلقة اقليدية.

السؤال الثالث (32 درجة):

أثبت ما يلي:

(1) لتكن R حلقة واحدية، عندئذٍ إذا كانت $A \neq R$ مثالية يسارية من R، فإنه توجد في R مثالية يسارية أعظمية تحوي A.

(2) إذا كانت A , B مثاليتين يساريتين في الحلقة R بحيث إن $A \subseteq B$ وإذا كانت B صغيرة في R فإن المثالية A تكون صغيرة في R.

(3) لتكن المثالية اليسارية A من الحلقة R عديمة القوى في R، عندئذٍ يوجد $n \in N^*$ يحقق $A^n = 0$.

2013 - 7 - 1

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة.

جامعة البعث | امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2010 - 2011 | المدة: ساعتان
كلية العلـوم | أسئلة مقرر البنى الجبرية (2) | العلامة: 100 درجة
قسم الرياضيات | سنة ثانية رياضيات | الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) $(Z_3 , + ,\cdot)$ حقل وليس حلقة موضعية.

(2) إن حلقة الخارج $2Z/_{6Z}$ حلقة واحدية .

(3) إن $12 \cdot 16 = 0$ في الحلقة $(Z_{25} , + , \cdot)$.

(4) إن حلقة الخارج $Z/_{6Z}$ هي حلقة تامة.

(5) المثالية الصفرية في الحلقة $(Z_{18} , + , \cdot)$ هي مثالية أولية.

(6) إن المثالية $4Z$ أعظمية في الحلقة $2Z$ وبالتالي فهي أولية فيها.

(7) $\{0 , 6\}$ مثالية أعظمية في الحلقة $(Z_{12} , + , \cdot)$.

(8) إن أي عنصر مغاير للصفر في الحلقة المنتهية يكون عكوساً أو قاسماً للصفر.

(9) مميز الحلقة $(11Z , + , \cdot)$ يساوي 11 .

(10) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة .

(11) كثيرة الحدود $x^4 + 3x^2 + 3 \in Z[x]$ أولية (غير قابلة للتحليل) في الحلقة $Z[x]$.

(12) إن حلقة الأعداد العادية $(Q , + , \cdot)$ حلقة أرتينية وليست نيوثرية.

السؤال الثاني (40 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) لتكن R حلقة تبديلية وواحدية، ولتكن A , B مثاليتين في الحلقة R تحققان $A + B = R$، عندئذٍ $A . B = A \cap B$.

(2) كل ساحة صحيحة منتهية تشكل حقلاً .

(3) لتكن R هي حلقة بول (أي $a^2 = a$ لكل $a \in R$) ، عندئذ تكون R تبديلية.

(4) إن جذر جاكبسون $J(R)$ في الحلقة التبديلية و الواحدية R هو مثالية صغيرة في R .

(5) كل مثالية أعظمية في الحلقة R ، هي مثالية أولية. (R حلقة تبديلية وواحدية)

السؤال الثالث (24 درجة):

(1) أثبت أن كل حلقة اقليدية R هي حلقة مثاليات رئيسية.

(2) إذا كانت R حلقة تبديلية و $x \in R$ ، فأثبت أنه إذا كان $x \in rad\ R$ حيث $rad\ R$ هو الجذر الأولي للحلقة R ، فإن x يكون عديم القوى.

2011 – 6 – 13

مع أطيب التمنيات بالنجاح
د. إيمان الخوجة

جامعة البعث — امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2009 - 2010 — المدة: ساعتان

كلية العلوم — أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (2) — العلامة: 80 درجة

قسم الرياضيات — سنة ثانية رياضيات — الاسم: قمر مرعي

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن حلقة الخارج $2Z/4Z$ ساحة صحيحة.

(2) إن عدد مثاليات الحلقة $(Z_7 , + , \cdot)$ سبع مثاليات فقط.

(3) كل حلقة جزئية من حلقة واحدية تكون حلقة واحدية.

(4) المثالية الصفرية في الحلقة $(Z_8 , + , \cdot)$ هي مثالية أولية.

(5) حقل الأعداد الحقيقية $(R , + , \cdot)$ حلقة أرتينية وليست نيوثرية.

(6) إن $(Z_6 , + , \cdot)$ حلقة موضعية.

(7) إن قانون الاختصار بالنسبة للضرب محقق في أي حلقة.

(8) العنصر $2 + 5Z$ عكوس (قابل للقلب) في حلقة الخارج $Z/5Z$.

(9) إن الحلقة Z ايزومورفية مع الحلقة nZ، لكل $n \geq 1$.

(10) كل ساحة مثاليات رئيسية هي حقل.

(11) كثيرة الحدود $x^2 + 4$ أولية (غير قابلة للتحليل) على مجموعة الأعداد العقدية C.

(12) إذا كانت $R = (Z_{24} , + , \cdot)$، فإن rad R (جذر R) يساوي المثالية الصفرية.

السؤال الثاني (25 درجة): علل صحة ما يلي:

(1) كل ساحة صحيحة ومنتهية هي حقل.

(2) إذا كان مميز الحلقة R يساوي الصفر، فإن R حلقة غير منتهية.

(3) كل مثالية يسارية عديمة القوى في حلقة، تكون مثالية عديمة.

(4) لتكن A , B مثاليتين في الحلقة R، عندئذٍ $A \cdot B \subseteq A \cap B$.

(5) إذا كانت R حلقة تبديلية وواحدية فإن كل مثالية أعظمية فيها هي مثالية أولية.

السؤال الثالث (9 درجات): إن حلقة كثيرات الحدود F[x] على أي حقل F، هي ساحة مثاليات رئيسية.

السؤال الرابع (10 درجات): لتكن R حلقة تبديلية وواحدية. برهن أنه إذا كانت R تحقق شرط الأعظمية (أية مجموعة غير خالية من المثاليات تملك عنصر أعظمي) فإن R تحقق شرط الانتهاء (أية مثالية في R منتهية التوليد).

2010 – 6 – 8

مع أطيب التمنيات

د. إيمان الخوجة

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الفصل الثاني للعام الدراسي 2007 – 2008
أسئلة الدورة الأولى لمقرر البنى الجبرية (2)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 80 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو بكلمة خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إذا كان n عدداً أولياً فإن عدد مثاليات الحلقة $(Z_n , + , \cdot)$ يساوي n مثالية.

(2) إن $(Z_7 , + , \cdot)$ حقلاً لكنها ليست حلقة موضعية.

(3) $(8) = (8) + (2)$ في الحلقة Z.

(4) Q مثالية في R .

(5) كل حقل ساحة مثاليات رئيسية.

(6) $(12)(16) = 0$ في الحلقة $(Z_{24} , + , \cdot)$.

(7) الحلقة Z ايزومورفية مع الحلقة nZ ، لكل $n \geq 1$.

(8) nZ ساحة صحيحة جزئية من Z ، لكل $n \geq 1$.

(9) إذا كانت R حلقة ما و $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود من الحلقة $R[x]$ من الدرجة 3 , 4 على الترتيب، فإن $f(x)g(x)$ كثيرة حدود من الدرجة 7 دوماً.

(10) كثيرة الحدود $x^2 + 3$ أولية (غير قابلة للتحليل) في Z_7 .

(11) إن $(Z_6 , + , \cdot)$ حلقة موضعية.

(12) $\{0 , 2 , 4\}$ مثالية أولية في الحلقة Z_6.

السؤال الثاني (20 درجة):

علل صحة العبارات الآتية:

1. أي حقل F يكون ساحة صحيحة.
2. إذا كان p أولياً في Z فإن المثالية الرئيسية (p) تكون أولية في Z.
3. لتكن R حلقة تبديلية و واحديه، عندئذ قواسم عنصر غير قابل للتحليل في R هي فقط العناصر المرافقة له والعناصر العكوسة في R .
4. إذا كان a قاسماً للعنصر b في الحلقة الاقليدية R و $\varphi(a) = \varphi(b)$، فإن a , b مترافقان في R .

السؤال الثالث (24 درجة): برهن ما يلي:

1. إن حلقة كثيرات الحدود $F[x]$ على أي حقل F، هي ساحة مثاليات رئيسية.
2. إذا كانت R حلقة تبديلية ونيوثرية (تحقق شرط انقطاع السلاسل المتزايدة) فإن كل مثالية في R تكون ذات مولدات منتهية (منتهية التوليد).